

4 Folgen und Reihen

In diesem Kapitel lernen wir zunächst die grundlegenden Eigenschaften von Folgen und Reihen kennen. Auf diesen Eigenschaften basiert die *Finanzmathematik*. Anschließend beschäftigen wir uns mit dem Begriff des Grenzwertes von Folgen bzw. Reihen. Der Grenzwertbegriff ist fundamental für die *Differentialrechnung* und *Integralrechnung*.

Generalvoraussetzung für § 4

Für den gesamten § 4 gilt: $n \in \mathbb{N}$!

Also insbesondere: n ist niemals Null.

Einführung Folgen

Setzen Sie die folgenden Folgen sinnvoll fort:

Einführung Folgen

3, 7, 11, 15, 19...	$d = 4$ $d = -3$	Addition eines konstanten Wertes	Arithmetische Folgen
2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, ... 1, -1, 1, -1, 1, ...	$q = \frac{1}{2}$ $q = -1$	Multiplikation mit konstanten Faktor	Geometrische Folgen
2, 3, 5, 7, 11, ...	Prim- zahl	beschreibende Eigenschaft	Sonstige Folgen
1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, ...	$a_n = \frac{1}{n}$	Bildungsgesetz	
siehe Tafel		„chaotisch“	

Tabelle 9: Einige Folgen zur Einstimmung

4.1 Arithmetische Folgen

Definition 4.1. Arithmetische Folgen besitzen eine konstante Differenz zwischen zwei benachbarten Folgegliedern und es gilt:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

wobei $a_1 \in \mathbb{R}$ den Startwert und $d \in \mathbb{R}$ die Konstante bedeutet.

4.2 Geometrische Folgen

Definition 4.2. Geometrische Folgen besitzen einen konstanten Faktor zwischen zwei benachbarten Folgegliedern und es gilt:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

wobei $a_1 \in \mathbb{R}$ den Startwert und $q \in \mathbb{R}$ den konstanten Faktor bedeutet.

4.3 Die Fibonacci-Zahlen

Definition 4.3. Gegeben sind:

$$a_1 = 1, a_2 = 1$$

sowie die Rekursionsformel (*recurrere* - lat.: zurücklaufen)

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad (\text{für } n \geq 3).$$

Damit erhalten wir die FIBONACCI-Zahlen

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
a_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233

n	14	15	16	17	18	19	20	21	...
a_n	377	610	987	1597	2584	4181	6765	10946	...

Tabelle 10: FIBONACCI-Zahlen

4.3.1 Kaninchenpopulation

. FIBONACCI illustrierte diese Folge durch die einfache mathematische Modellierung des Wachstums einer Kaninchenpopulation nach folgenden Regeln:

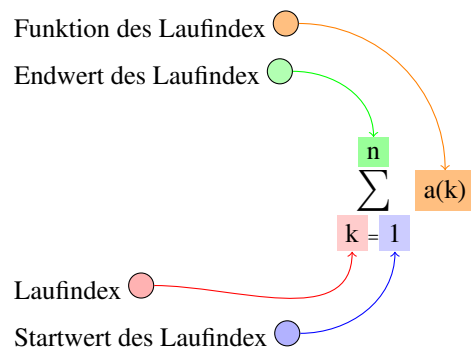
1. Jedes Paar Kaninchen wirft pro Monat ein weiteres Paar Kaninchen.
2. Ein neugeborenes Paar bekommt erst im zweiten Lebensmonat Nachwuchs (die Austragungszeit reicht von einem Monat in den nächsten).
3. Die Tiere befinden sich in einem abgeschlossenen Raum, so dass kein Tier die Population verlassen und keines von außen hinzukommen kann.



Wissenschaftler 5:
FIBONACCI, pisaner Mathematiker
(um 1180 Pisa - nach 1241 Pisa)

4.4 Das Summenzeichen

Definition 4.4. In der Mathematik werden *Summen* häufig unter Verwendung des *Summenzeichens* Σ (Gross-Sigma) geschrieben.¹³



Der Laufindex wird immer um genau Eins erhöht, niemals um einen anderen Wert.

¹³Das Symbol Σ wurde 1755 durch Leonhard EULER (1707-1783) eingeführt.

4.4.1 Beispiel 1 für das Summenzeichen

Beispiel 1 für das Summenzeichen

Beispiel für das Summenzeichen

Wir wollen

$$\sum_{k=1}^5 k^2$$

berechnen:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^5 k^2 &= a(1) + a(2) + a(3) + a(4) + a(5) \\ &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 \\ &= 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55\end{aligned}$$

4.4.2 Beispiel 2 für das Summenzeichen

Beispiel 2 für das Summenzeichen

Beispiel für das Summenzeichen

Wir wollen

$$\sum_{k=-1}^3 (2k^2 + 1)$$

berechnen:

$$\begin{aligned}\sum_{k=-1}^3 (2k^2 + 1) &= a(-1) + a(0) + a(1) + a(2) + a(3) \\ &= [2(-1)^2 + 1] + [2 \cdot 0^2 + 1] + [2 \cdot 1^2 + 1] + [2 \cdot 2^2 + 1] + [2 \cdot 3^2 + 1] \\ &= 3 + 1 + 3 + 9 + 19 = 35\end{aligned}$$

4.5 Arithmetische Reihe

Definition 4.5. Unter einer arithmetischen Reihe verstehen wir die Folge der Partialsummen S_n einer arithmetischen Folge und es gilt:

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$



Wissenschaftler 6:
Carl-Friedrich GAUSS, deutscher Mathematiker
(30.04.1777 Braunschweig - 23.02.1855 Göttingen)
„*Princeps Mathematicorum*“

4.5.1 Beispiel Arithmetische Reihe

Beispiel für eine arithmetische Reihe

3	=	3	=	$\frac{3+3}{2} \cdot 1$
3 + 7	=	10	=	$\frac{3+7}{2} \cdot 2$
3 + 7 + 11	=	21	=	$\frac{3+11}{2} \cdot 3$
3 + 7 + 11 + 15	=	36	=	$\frac{3+15}{2} \cdot 4$
3 + 7 + 11 + 15 + 19	=	55	=	$\frac{3+19}{2} \cdot 5$
3 + 7 + 11 + 15 + 19 + 23	=	78	=	$\frac{3+23}{2} \cdot 6$

Tabelle 11: Beispiel einer arithmetischen Reihe

4.6 Geometrische Reihen

Definition 4.6. Unter einer geometrischen Reihe verstehen wir die Folge der Partialsummen S_n einer geometrischen Folge und es gilt:

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad (q \neq 1)$$

Die Bedingung

$$q \neq 1$$

ist wesentlich !

Bitte denken Sie daran, daß Sie *nicht durch Null dividieren* dürfen !

4.6.1 Ein spezieller Typ von geometrischen Reihen

. Geometrische Folgen mit $q = 1$ sind konstant:

z. B. $3, 3, 3, 3, 3, \dots$

Da die Formel 4.6 hierfür nicht anwendbar ist, interpretieren wir solche Folgen als arithmetische Folge mit Differenz $d = 0$. Dann greift für die Reihe die Formel 4.5

4.7 Grenzwert einer Folge

Definition 4.7. (i) Eine Zahl $g \in \mathbb{R}$ heißt Grenzwert der Folge a_n , wenn es zu jeder vorgegebenen Schranke $\varepsilon > 0$ einen Index $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt:

$$|a_n - g| < \varepsilon \stackrel{\text{1.13 (iv)}}{\iff} -\varepsilon < a_n - g < \varepsilon \iff g - \varepsilon < a_n < g + \varepsilon$$

(ii) Besitzt eine Folge a_n einen Grenzwert $g \in \mathbb{R}$, so heißt sie konvergent, andernfalls heißt sie divergent.¹⁴

(iii) Im Falle der Konvergenz schreiben wir

$$g = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

„ g ist Limes der a_n für n gegen ∞ “.

4.7.1 Beispiele für Grenzwerte

Beispiele für Grenzwerte

$$(i) \quad a_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

$$(ii) \quad a_n = 7 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 7$$

$$(iii) \quad a_n = \frac{n-1}{n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$$

$$(iv) \quad a_n = n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \text{ existiert nicht.}$$

$$(v) \quad a_n = (-1)^n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \text{ existiert nicht.}$$

Die „Grenzwerte“ ∞ bzw. $-\infty$ existieren nicht

Ein Grenzwert ∞ bzw. $-\infty$ ist verboten, vgl. 4.9

4.8 Eindeutigkeit des Grenzwertes

Satz 4.8. Sei a_n eine konvergente Folge mit Grenzwert $g \in \mathbb{R}$.

Dann ist der Grenzwert $g \in \mathbb{R}$ eindeutig bestimmt.

¹⁴Die Begriffe *konvergent* und *divergent* gehen auf James GREGORY (1638-1675) zurück, der sie 1667 erstmalig verwendet hat.

4.9 Regeln für konvergente Folgen

Satz 4.9. Seien a_n und b_n zwei konvergente Folgen mit den Grenzwerten

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \quad \text{und} \quad b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

Dann gilt:

(i) Die Folge $(a_n \pm b_n)$ konvergiert und es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$$

(ii) Sei $b \neq 0$. Dann konvergiert auch die Folge $\frac{a_n}{b_n}$ und es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$$

4.9.1 Beispiele für Grenzwerte

Beispiele für Grenzwerte

Bestimmen Sie die Grenzwerte:

(i)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 13n}{n^2 - 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \cdot (3 + \frac{13}{n})}{n^2 \cdot (1 - \frac{2}{n^2})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{13}{n}}{1 - \frac{2}{n^2}} = \frac{3 + 0}{1 - 0} = 3$$

(ii)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 13n}{n^3 - 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \cdot (\frac{3}{n} + \frac{13}{n^2})}{n^3 \cdot (1 - \frac{2}{n^3})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{n} + \frac{13}{n^2}}{1 - \frac{2}{n^3}} = \frac{0 + 0}{1 - 0} = 0$$

4.9 Verbotene Grenzwerte

. Hierzu folgendes Beispiel: Katastrophe - 1. Teil

$$\left. \begin{array}{l} a_n = n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \\ b_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$a_n \cdot b_n = n \cdot \frac{1}{n} = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1 \not\equiv \infty \cdot 0$$

. Katastrophe - 2. Teil

$$\left. \begin{array}{l} a_n = n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \\ b_n = \frac{1}{n^2} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$a_n \cdot b_n = n \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \not\equiv \infty \cdot 0$$

. Damit folgt also

$$\left. \begin{array}{l} 1 = \infty \cdot 0 \\ 0 = \infty \cdot 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 = 0 \quad \nexists$$

Grenzwerte ∞ und $-\infty$ verboten

Daher sind ∞ und $-\infty$ als Grenzwerte verboten !

4.10 Konvergenz von q hoch n

Satz 4.10. Es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} \text{divergent} & q \leq -1 \\ 0 & |q| < 1 \\ 1 & q = 1 \\ \text{divergent} & q > 1 \end{cases}$$

q	Repräsentant		$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n$
$q < -1$	$q = -2$	-2 4 -8 16 ...	nicht konvergent
$q = -1$	$q = -1$	-1 1 -1 1 ...	nicht konvergent
<i>Beweis.</i> $-1 < q \leq 0$	$q = -\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ $-\frac{1}{8}$ $\frac{1}{16}$...	$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$
$0 < q < 1$	$q = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{16}$...	$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$
$q = 1$	$q = 1$	1 1 1 1 ...	$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 1$
$q > 1$	$q = 2$	2 4 8 16 ...	nicht konvergent

Tabelle 12: Konvergenz von q^n

□

Satz 4.11. Wir fragen uns nach dem Grenzwert einer geometrischen Reihe, wenn wir unendlich viele Glieder summieren. Dazu erinnern wir uns an die Formel der geometrischen Reihe in 4.6 :

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad \text{mit } q \neq 1$$

Bitte beachten Sie, daß dann in 4.10 gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} \text{divergent} & q \leq -1 \\ 0 & |q| < 1 \\ \text{VERBOTEN} & q = 1 \\ \text{divergent} & q > 1 \end{cases}$$

Wir fragen nun nach

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_1 \cdot \frac{1}{1 - q} \cdot (1 - q^n) \right) \\ &= \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1)}_{= a_1} \cdot \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 - q} \right)}_{= \frac{1}{1 - q}} \cdot \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \underbrace{q^n}_{\rightarrow 0} \right)}_{= 1 - 0 = 1} \end{aligned}$$

Dies gilt jedoch nach 4.10 nur, falls $-1 < q < 1$.

4.12 Unendliche geometrische Reihe:

Definition 4.12. Gegeben sei die geometrische FOLGE (vgl. 4.2)

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \quad \text{mit } -1 < q < +1$$

Dann ist die unendliche geometrische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n a_k \right)$$

definiert und es gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 \cdot \frac{1}{1 - q}$$

ACHTUNG:

Die Formel für die unendliche geometrische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 \cdot \frac{1}{1-q}$$

gilt genau dann, wenn

$$-1 < q < +1$$

Diese Bedingung ist wesentlich !

4.13 Beispiele zur unendlich geometrischen Reihe

Beispiele zur unendlichen geometrischen Reihe

Berechnen Sie den Wert folgender unendlicher geometrischer Reihen:

Beispiel 1 zur unendlichen geometrischen Reihe

$$\begin{aligned} 0,\bar{4} &= \frac{4}{10} + \frac{4}{100} + \frac{4}{1000} + \dots \\ &= \frac{4}{10} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} \\ &= \frac{4}{10} \cdot \frac{1}{\frac{9}{10}} \\ &= \frac{4}{10} \cdot \frac{10}{9} \\ &= \boxed{\frac{4}{9} = 0,\bar{4}} \end{aligned}$$

Es gilt: $a_1 = \frac{4}{10}$ und $-1 < q = \frac{1}{10} < +1$

Beispiel 2 zur unendlichen geometrischen Reihe

$$\begin{aligned}
 0,\overline{63} &= \frac{63}{100} + \frac{63}{10.000} + \frac{63}{1.000.000} + \dots \\
 &= \frac{63}{100} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{100}} \\
 &= \frac{63}{100} \cdot \frac{1}{\frac{99}{100}} \\
 &= \frac{63}{100} \cdot \frac{100}{99} \\
 &= \frac{63}{99} = \boxed{\frac{7}{11} = 0,\overline{63}}
 \end{aligned}$$

Es gilt: $a_1 = \frac{63}{100}$ und $-1 < q = \frac{1}{100} < +1$

Beispiel 3 zur unendlichen geometrischen Reihe

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

Es gilt: $a_1 = \frac{1}{2}$ und $-1 < q = \frac{1}{2} < +1$

Beispiel 4 zur unendlichen geometrischen Reihe

$$\begin{aligned}
 -\sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \dots = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - (-\frac{1}{2})} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{3}{2}} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \\
 &= \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

Es gilt: $a_1 = \frac{1}{2}$ und $-1 < q = -\frac{1}{2} < +1$